

*А. Г. ГОРБАШОВА*, аспирант, НТУУ «КПИ», Киев;  
*О. Н. ПЕТРИЩЕВ*, д.т.н., проф., НТУУ «КПИ», Киев;  
*Г. М. СУЧКОВ*, д.т.н., проф., НТУ «ХПИ», Харьков

## **ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

В работе рассмотрена задача возбуждения осесимметричными силами Лоренца продольных и поперечных сферических волн в металлическом полупространстве. Задача решена в приближении дальнего поля с применением интегрального преобразования Ханкеля по радиальной координате. Исследовано влияние размеров в области существования сил Лоренца на амплитудно-частотный спектр возбужденных волн. Выполнен сравнительный анализ энергоемкости продольных и поперечных волн

У роботі розглянута задача збудження осесиметричними силами Лоренца поздовжніх і поперечних сферичних хвиль в металевому півпросторі. Задача вирішена в наближенні далекого поля із застосуванням інтегрального перетворення Ханкеля по радіальній координаті. Досліджено вплив розмірів в області існування сил Лоренца на амплітудно-частотний спектр збуджених хвиль. Виконано порівняльний аналіз енергоемності поздовжніх і поперечних хвиль.

The paper deals with problem of excitation of axisymmetric Lorentz force of the longitudinal and transverse spherical waves in the metal half-space. The problem is solved in the far-field approximation using the Hankel integral transform over the radial coordinate. The effect sizes in the range of existence of the Lorentz forces on the amplitude-frequency spectrum of the excited waves. A comparative analysis of the energy of the longitudinal and transverse waves.

**Введение.** При решении практических задач ультразвуковой толщинометрии металлоизделий часто возникают трудно преодолимые препятствия, которые обусловлены принципиальной невозможностью осуществления механического контакта с поверхностью исследуемого объекта. В этом случае необходимо использовать устройства, в которых реализуется бесконтактный (электромагнитный) способ возбуждения и приема ультразвуковых волн [1, 2]. Дальнейшее совершенствование технических характеристик и показателей этих устройств практически невозможно без ясного понимания качественных и количественных закономерностей электромагнитного способа возбуждения акустических волн в металлах.

Известно [3], что под действием изменяющихся во времени нагрузок, которые прикладываются к поверхности массивного твердого тела, в нем возбуждаются и распространяются поверхностные волны Рэлея, а также продольные и поперечные волны. В работе [4] решена задача об электромагнитном возбуждении поверхностных волн Рэлея в металлах ферромагнитной группы и в ферромагнетиках.

В настоящей работе приводятся решения динамических задач теории упругости о возбуждении осесимметричных сферических продольных и

поперечных волн в изотропном полупространстве системой поверхностных и объемных сил.

Граничные задачи при электромагнитном возбуждении осесимметричных, радиально распространяющихся сферических продольных и поперечных волн. Рассмотрим металлическое полупространство (рис. 1), над поверхностью которого располагается

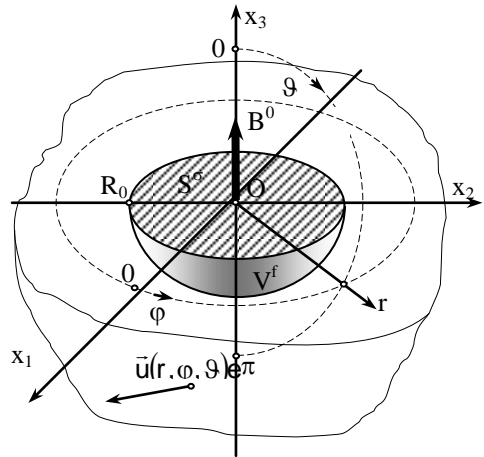


Рис. 1. Расчетная схема задачи об электромагнитном возбуждении ультразвуковых волн в металлическом полупространстве

источник (он на рис. 1 не показан) переменного магнитного поля. Источник генерирует изменяющееся во времени магнитное поле,

которое обладает симметрией относительно оси  $Ox_3$  и характеризуется вектором напряженности  $\vec{H}^*(x_k)e^{i\omega t}$ , где  $\vec{H}^*(x_k)$  - амплитуда;  $x_k$  ( $k=1,2,3$ ) - координаты точки наблюдения;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  - круговая частота смены знака;  $t$  - время. В присутствии постоянного, вертикально ориентированного, поля подмагничивания (источник этого поля на рис. 1 не показан), которое характеризуется магнитной индукцией  $B^0$ , не изменяющейся в пределах объема  $V^f$ , переменное магнитное поле формирует в этом объеме и на его поверхности  $S^\sigma$  систему поверхностных и объемных сил. Если металл не является ферромагнетиком, то на поверхности  $S^\sigma$ , ограниченной окружностью радиуса  $R_0$ , который имеет смысл физической бесконечности для данной конструкции источника переменного магнитного поля [4], возникают нормальные и касательные напряжения Максвелла [5]. В объеме  $V^f$  при этом возникают силы Лоренца, которые характеризуются объемной плотностью  $\vec{f}^* = \vec{j}^e \times \vec{B}$ , где  $\vec{j}^e$  - поверхностная плотность вихревого тока в металле;  $\vec{B}$  - вектор магнитной индукции. Для ферромагнетиков поверхностные и объемные нагрузки определяются как алгебраическая сумма пондеромоторных сил электромагнитного поля и магнитострикционных сил [6]

В сферической системе координат (рис. 1) граничная задача, решение которой позволит определить компоненты вектора смещений  $\vec{u}(r, \varphi, \vartheta)e^{i\omega t}$  в произвольной точке наблюдения за пределами области существования внешних силовых факторов, вне зависимости от типа металла формулируется следующим образом.

Найти амплитудные значения компоненты вектора смещения  $\vec{u}(r, \varphi, \vartheta)$ , которые в объеме  $V$  ( $\vartheta > \pi/2$ ) полупространства удовлетворяют уравнению установившихся гармонических колебаний

$$(\lambda + 2G)\text{graddiv}\vec{u} - \text{Grotrot}\vec{u} + \rho_0\omega^2\vec{u} - \vec{f}^* = 0 \forall (r, \varphi, \vartheta) \in V \quad (1)$$

где  $\lambda$ ,  $G$  и  $\rho_0$  - модули упругости и плотность металла, а на его свободной поверхности  $S$  ( $\vartheta = \pi/2$ ) создают напряжения, амплитуды которых  $\sigma_{g\beta}(r, \varphi, \pi/2)$  ( $\beta = r, \varphi, \vartheta$ ) удовлетворяют третьему закону Ньютона, т. е.

$$\sigma_{g\beta}(r, \varphi, \pi/2) - \sigma_{g\beta}^*(r, \varphi, \pi/2) = 0 \forall (r, \varphi) \in S, \quad (2)$$

где  $\sigma_{g\beta}^*(r, \varphi, \pi/2)$  ( $\beta = r, \varphi, \vartheta$ ) - амплитудные значения поверхностных нагрузок, т. е., в общем случае, алгебраическая сумма соответствующих компонентов тензора Максвелла и магнитострикционных напряжений.

Для металлов неферромагнитной группы при наличии источника, который генерирует осесимметричное, гармонически изменяющееся во времени, магнитное поле, амплитуда вектора напряженности которого определяется компонентами  $H_r^*(r, \vartheta)$  и  $H_\vartheta^*(r, \vartheta)$ , граничная задача (1), (2) распадается на две самостоятельных граничных задачи, решения которых несут информацию об амплитудах возбуждаемых продольных и поперечных волн. Математические формулировки этих задач имеют следующий вид:

а) *продольные волны*

найти вектор смещения  $\vec{u}^\ell(r, \vartheta)$ , который удовлетворяет условию  $\text{rot}\vec{u}^\ell(r, \vartheta) = 0$  в любой точке упругого полупространства и уравнению установившихся колебаний

$$(\lambda + 2G)\text{graddiv}\vec{u}^\ell + \rho_0\omega^2\vec{u}^\ell - \vec{f}^* = 0 \forall (r, \vartheta) \in V, \quad (3)$$

где  $\vec{f}^*(r, \vartheta) = \vec{e}_\vartheta f_\vartheta^*(r, \vartheta)$ , где  $\vec{e}_\vartheta$  - единичный вектор (орт) сферической системы координат; и граничным условиям на поверхности  $S$

$$\sigma_{g_r}(r, \pi/2) = 0 \forall r \in S, \quad \sigma_{g_\vartheta}(r, \pi/2) - \sigma_{g_\vartheta}^*(r, \pi/2) = 0 \forall r \in S; \quad (4)$$

б) поперечные (сдвиговые) волны

найти вектор смещения  $\vec{u}^s(r, \vartheta)$ , который удовлетворяет условию  $\text{div} \vec{u}^s(r, \vartheta) = 0$  в любой точке упругого полупространства и уравнению установившихся колебаний

$$- \text{Grotrot} \vec{u}^s + \rho_0 \omega^2 \vec{u}^s - \vec{f}^* = 0 \forall (r, \vartheta) \in V, \quad (5)$$

где  $\vec{f}^*(r, \vartheta) = \vec{e}_r f_r^*(r, \vartheta)$ , где  $\vec{e}_r$  - единичный вектор (орт) сферической системы координат; и граничным условиям на поверхности  $S$

$$\sigma_{gr}(r, \pi/2) - \sigma_{gr}^*(r, \pi/2) = 0 \forall r \in S, \quad \sigma_{g\vartheta}(r, \pi/2) = 0 \forall r \in S. \quad (6)$$

По своему физическому содержанию граничная задача (1), (2) и её частные формулировки (3), (4) и (5), (6) являются обобщением классической задачи Лэмба [3], и по этой причине граничные задачи (1) – (6) можно называть обобщенными задачами Лэмба.

**Общие решения обобщенных задач Лэмба для продольных и поперечных волн.** Общее решение обобщенной задачи Лэмба (3), (4) записывается в следующем виде

$$\vec{u}^\ell(r, \vartheta) = \vec{V}^\ell(r, \vartheta) + \vec{W}^\ell(r, \vartheta), \quad (7)$$

где  $\vec{V}^\ell(r, \vartheta)$  - составляющая волнового поля смещений материальных частиц полупространства созданная объемной силой с плотностью  $f_g^*(r, \vartheta)$ ;  $\vec{W}^\ell(r, \vartheta)$  - составляющая, которая сформированная поверхностной нагрузкой  $\sigma_{g\vartheta}^*(r, \vartheta)$ .

Компоненты векторов  $\vec{V}^\ell(r, \vartheta)$  и  $\vec{W}^\ell(r, \vartheta)$  определяются следующими выражениями:

$$V_r^\ell(r, \vartheta) = -(k_\ell r)^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n}(k_\ell) \left[ H_{2n-1/2}^{(2)}(k_\ell r) - \frac{2n+1}{(k_\ell r)} H_{2n+1/2}^{(2)}(k_\ell r) \right] P_{2n}(\xi)$$

$$V_\vartheta^\ell(r, \vartheta) = -(k_\ell r)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n}(k_\ell) H_{2n+1/2}^{(2)}(k_\ell r) \frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial \vartheta},$$

$$W_r^\ell(r, \vartheta) = k_\ell (k_\ell r)^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \left[ H_{2n-1/2}^{(2)}(k_\ell r) - \frac{2n+1}{(k_\ell r)} H_{2n+1/2}^{(2)}(k_\ell r) \right] P_{2n}(\xi),$$

$$W_{\mathcal{G}}^{\ell}(r, \mathcal{G}) = k_{\ell}(k_{\ell}r)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} H_{2n+1/2}^{(2)}(k_{\ell}r) \frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial \mathcal{G}},$$

где  $k_{\ell} = \omega / \sqrt{(\lambda + 2G) / \rho_0}$  - волновое число продольных волн;  $U_{2n}(k_{\ell})$  и  $C_{2n}$  - амплитудные множители;  $H_{2n \pm 1/2}^{(2)}(k_{\ell}r)$  - функции Ханкеля второго рода полуцелого порядка;  $P_{2n}(\xi)$  - функции (полиномы) Лежандра первого рода четной степени  $2n$ ;  $\xi = \cos \mathcal{G}$  - аргумент функций Лежандра.

Амплитудные множители  $U_{2n}(k_{\ell})$  и  $C_{2n}$  определяются следующими соотношениями

$$U_{2n}(k_{\ell}) = \frac{i\pi}{2(\lambda + 2G)} \int_0^{\infty} r(k_{\ell}r)^{3/2} f_{2n}^*(r) J_{2n+1/2}(k_{\ell}r) d(k_{\ell}r),$$

где  $f_{2n}^*(r) = \frac{4n+1}{4n(2n+1)} \int_{-1}^0 f_{\mathcal{G}}^*(r, \mathcal{G}) \sin \mathcal{G} \frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial \xi} d\xi$ ;  $J_{2n+1/2}(k_{\ell}r)$  - функция Бесселя полуцелого порядка;

$$C_{2n} = \frac{1}{4Gk_{\ell}P_{2n}(0)\beta_1} \int_0^{\infty} (k_{\ell}r)^{-1/2} \sigma_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}^*(r, \pi/2) \Phi_{2n}(k_{\ell}r) d(k_{\ell}r) - \frac{\beta_2}{\beta_1} U_{2n}(k_{\ell}),$$

$$\text{где } \Phi_{2n}(k_{\ell}r) = J_{2n-3/2}(k_{\ell}r) + J_{2n+1/2}(k_{\ell}r) + J_{2n+5/2}(k_{\ell}r);$$

$$\beta_1 = k_{\ell} [b_1/(4n-1) + b_2/(4n+1) + b_3/(4n+5)];$$

$$\beta_2 = a_1/(4n-1) + a_2/(4n+1) + a_3/(4n+5);$$

$$b_1 = \frac{1}{4n-1} + \left[ \frac{\lambda}{2G} - (2n+1)^2 \right] / (16n^2 - 1); \quad b_2 = b_1 + b_3;$$

$$b_3 = \left[ \frac{\lambda}{2G} - (2n+1)^2 \right] / [(4n+1)(4n+3)];$$

$$a_1 = \frac{1}{4n-1} + (2n+1) \left( 2n+1 + \frac{\lambda}{2G} \right) / (16n^2 - 1); \quad a_2 = \frac{1}{4n-1} + \frac{\lambda}{2G} + a_3;$$

$$a_1 = (2n+1) \left( 2n+1 + \frac{\lambda}{2G} \right) / [(4n+1)(4n+3)].$$

Общее решение обобщенной задачи Лэмба (5), (6) записывается в следующем виде:

$$\bar{u}^s(r, \vartheta) = \bar{V}^s(r, \vartheta) + \bar{W}^s(r, \vartheta), \quad (8)$$

где составляющие волнового поля смещений  $\bar{V}^s(r, \vartheta)$  и  $\bar{W}^s(r, \vartheta)$  имеют тот же физический смысл, что и составляющие поля смещений  $\bar{u}^\ell(r, \vartheta)$ .

Компоненты векторов  $\bar{V}^s(r, \vartheta)$  и  $\bar{W}^s(r, \vartheta)$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} V_r^s(r, \vartheta) &= (k_s r)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n+1}(k_s) H_{2n+3/2}^{(2)}(k_s r) P_{2n+1}(\xi), \\ V_\vartheta^s(r, \vartheta) &= (k_s r)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n+1}(k_s)}{(2n+1)(2n+2)} \left[ H_{2n+1/2}^{(2)}(k_s r) - \frac{2n+1}{(k_s r)} H_{2n+3/2}^{(2)}(k_s r) \right] \frac{\partial P_{2n+1}(\xi)}{\partial \vartheta}, \\ w_r^s(r, \vartheta) &= k_s (k_s r)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(2n+2) C_{2n+1} H_{2n+3/2}^{(2)}(k_s r) P_{2n+1}(\xi), \\ W_\vartheta^s(r, \vartheta) &= k_s (k_s r)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} \left[ H_{2n+1/2}^{(2)}(k_s r) - \frac{2n+1}{(k_s r)} H_{2n+3/2}^{(2)}(k_s r) \right] \frac{\partial P_{2n+1}(\xi)}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

где  $k_s = \omega / \sqrt{G/\rho_0}$  - волновое число поперечных (сдвиговых) волн;  $U_{2n+1}(k_\ell)$  и  $C_{2n+1}$  - амплитудные множители, которые рассчитываются по следующим формулам

$$U_{2n+1}(k_s) = \frac{i\pi}{2G} \int_0^\infty r (k_s r)^{3/2} f_{2n+1}^*(r) J_{2n+3/2}(k_s r) d(k_s r),$$

$$\text{где } f_{2n+1}^*(r) = (n+1) \int_{-1}^0 f_r^*(r, \vartheta) P_{2n+1}(\xi) d\xi;$$

$$C_{2n+1} = \frac{1}{2Gk_s^2 P_{2n}(0) Q_n} \int_0^\infty (k_s r)^{-1/2} \sigma_{\vartheta r}^*(r, \pi/2) \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) - \frac{1}{k_s} U_{2n+1}(k_s)$$

где  $Q_n = q_1/(4n-1) + q_2/(4n+3) + q_3/(4n+7)$ ;

$$q_1 = \eta_1/(4n+1) + \eta_3/[(4n+1)(4n+3)]; \quad q_2 = \eta_1/(4n+1) + \eta_2 + \eta_3 [1/(4n+1) + 1/(4n+5)]/(4n+3); \quad q_3 = \eta_3/[(4n+3)(4n+5)];$$

$$\eta_1 = b_1^* - (2n+1)a_1^*; \quad \eta_2 = b_2^* - (2n+1)a_2^*; \quad \eta_3 = b_3^* - (2n+1)a_3^*;$$

$$b_1^* = -(3/2)(2n+1); \quad b_2^* = 2n+1; \quad b_3^* = -(2n+1)^2(4n+11/2);$$

$$a_1^* = -1/[(2n+1)(n+1)]; \quad a_2^* = a_1^*/2; \quad a_3^* = (2n^2 + 5n + 2)/(2n^2 + 3n + 1) + 1;$$

$$\Psi_{2n+1}(k_s r) = J_{2n-1/2}(k_s r) + J_{2n+3/2}(k_s r) + J_{2n+7/2}(k_s r).$$

В заключение необходимо особо подчеркнуть то обстоятельство, что амплитудные множители  $C_{2n}$  и  $C_{2n+1}$  определяются в результате разложения поверхностных нагрузок  $\sigma_{g_r}^*(r, \pi/2)$  и  $\sigma_{g_g}^*(r, \pi/2)$  в ряды по функциям  $\psi(k_s r) = (k_s r)^{-1/2} \Psi_{2n+1}(k_s r)$  и  $\varphi(k_\ell r) = (k_\ell r)^{-1/2} \Phi_{2n}(k_\ell r)$ . По этой

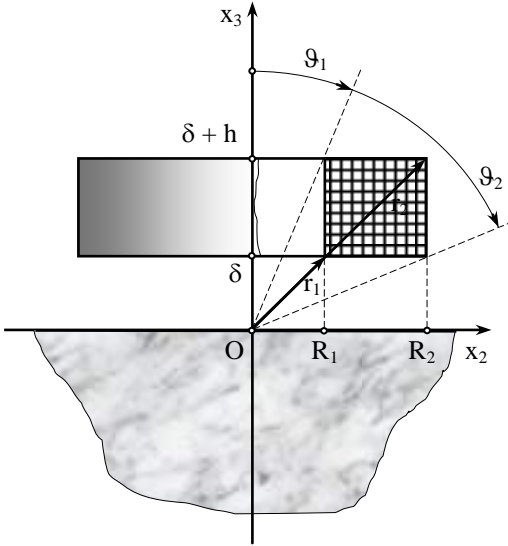


Рис. 2. Расчетная схема осесимметричного индуктора переменного магнитного поля

причине они определяются не компонентами вектора напряженности переменного магнитного поля, которое создается источником, а его интегральными характеристиками, которые появляются в процессе вычисления коэффициентов разложения в указанные выше ряды. Действительно, так как  $\sigma_{g_r}^*(r, \pi/2) = -B^0 H_r^*(r, \pi/2)$  и  $\sigma_{g_g}^*(r, \pi/2) = -B^0 H_g^*(r, \pi/2)$ , то интегральные характеристики вектора напряженности переменного магнитного поля на поверхности металлического полупространства

$H_r^{(2n+1)}(k_s, \pi/2)$  и  $H_g^{(2n)}(k_\ell, \pi/2)$  определяются следующим образом

$$H_r^{(2n+1)}(k_s, \pi/2) = \int_0^\infty (k_s r)^{-1/2} H_r^*(r, \pi/2) \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r), \quad (9)$$

$$H_g^{(2n)}(k_\ell, \pi/2) = \int_0^\infty (k_\ell r)^{-1/2} H_g^*(r, \pi/2) \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r), \quad (10)$$

Практическая ценность интегральных представлений (9) и (10) заключается в том, что их применение позволяет выполнить строгое и полное решение задачи технической электродинамики о распределении

переменного магнитного поля в токопроводящем, анизотропном по магнитным свойствам, полупространстве, которое создается внешним источником, находящимся над поверхностью металла.

Расчет пондеромоторных сил электромагнитного поля осесимметричного индуктора. Рассмотрим индуктор (источник переменного магнитного поля), который образован  $N$  concentricки уложенными витками провода (рис. 2). Индуктор в форме кольцевой катушки высотой  $h$  и толщиной укладки витков  $R_2 - R_1$  расположен на расстоянии  $\delta$  над поверхностью  $x_3 = 0$  (в сферической системе координат  $\vartheta = \pi/2$ ) токопроводящего упругого полупространства с удельной электрической проводимостью  $r_0$ . Будем полагать, что материал полупространства является металлом неферромагнитной группы, т. е. в нем отсутствуют магнитострикционные эффекты.

В присутствии достаточно сильного и не изменяющегося во времени магнитного поля, вектор магнитной индукции которого полностью определяется вертикальным компонентом  $B_3^0$  (источник этого поля на рис. 2 не показан) переменный электрический ток  $I_0 e^{i\omega t}$  в витках осесимметричного индуктора создает на поверхности металла поверхностные нагрузки

$$\sigma_{\vartheta r}^*(r, \pi/2) = -B_3^0 H_r^*(r, \pi/2), \quad \sigma_{\vartheta \vartheta}^*(r, \pi/2) = -B_3^0 H_{\vartheta}^*(r, \pi/2), \quad (11)$$

а в объеме металла – силы Лоренца с объемной плотностью

$$f_r^*(r, \vartheta) = -B_3^0 J_{\varphi}^*(r, \vartheta) \sin \vartheta, \quad f_{\vartheta}^*(r, \vartheta) = -B_3^0 J_{\varphi}^*(r, \vartheta) \cos \vartheta, \quad (12)$$

где  $r$  и  $\vartheta$  - текущие значения радиальной координаты и полярного угла сферической системы координат (рис. 1);  $H_r^*(r, \pi/2)$ ,  $H_{\vartheta}^*(r, \pi/2)$  и  $J_{\varphi}^*(r, \vartheta)$  - амплитудные значения гармонически изменяющихся во времени компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля на поверхности металла и поверхностной плотности вихревого тока в объеме полупространства.

Для того, чтобы определить эти величины и построить аналитические конструкции для расчета амплитудных множителей продольных и поперечных сферических волн, рассмотрим вначале переменное магнитное поле в области  $\{0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$ , т. е. над поверхностью металла.



В этой области существуют сторонние электрические токи, вектор поверхностной плотности которых  $\vec{J}^s$  полностью определяется азимутальным компонентом  $J_\varphi^s(r, \vartheta)$ , причем

$$J_\varphi^s(r, \vartheta) = J_0 f_1(x) f_2(\vartheta), \quad (13)$$

где  $J_0 = I_0 N / [h(R_2 - R_1)]$  - плотность тока в электрическом контуре источника переменного магнитного поля;  $f_1(x) = 0 \forall x \notin [x_1, 1]$  - весовая функция;  $x = r/r_2$  и  $x_1 = r_1/r_2$  - безразмерные радиальные координаты;  $f_2(\vartheta) = 0 \forall \vartheta \notin [\vartheta_1, \vartheta_2]$  - весовая функция полярного угла; геометрический смысл величин  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  следует из приведенных на рис. 2 построений. Введем векторный потенциал  $\vec{A}(r, \vartheta)$ , такой, что выполняется равенство  $\text{rot} \vec{A}(r, \vartheta) = \mu_0 \vec{H}(r, \vartheta)$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная проницаемость вакуума;  $\vec{H}(r, \vartheta)$  - амплитудное значение гармонически изменяющегося во времени вектора напряженности переменного магнитного поля над поверхностью металла. В этом случае из уравнения Максвелла  $\text{rot} \vec{H}(r, \vartheta) = \vec{J}(r, \vartheta)$  получаем уравнение для векторного потенциала  $\vec{A}(r, \vartheta)$  в следующем виде

$$\text{rot rot} \vec{A}(r, \vartheta) = \mu_0 \vec{J}^s(r, \vartheta) \quad (14)$$

Для осесимметричного, т. е. не зависящего от азимутального угла  $\varphi$ , магнитного поля, общее решение уравнения (14) записывается в следующем виде

$$\vec{A}(r, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(r) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \vartheta} \quad (15)$$

где

$$A_\nu(r) = \begin{cases} [C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x)]x^\nu + C_2^{(\nu)}(x)x^{-(1+\nu)} & \text{при } x \leq 1, \\ [C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(1)] + C_2^{(\nu)}(1)x^{-(1+\nu)} & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$C_1^{(\nu)}$  - подлежащие определению константы;  $C_1^{(\nu)}(x)$  и  $C_2^{(\nu)}(x)$  - варьируемые константы, причем

$$C_1^{(\nu)}(x) = -J_0 r_2^2 \mu_0 F_1^{(\nu)}(x); \quad C_2^{(\nu)}(x) = J_0 r_2^2 \mu_0 F_2^{(\nu)}(x);$$

$$F_1^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2\nu(\nu+1)} \int_{x_1}^x x^{1-\nu} f_1(x) \Phi_\nu(x) dx ;$$

$$F_2^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2\nu(\nu+1)} \int_{x_1}^x x^{2+\nu} f_1(x) \Phi_\nu(x) dx ;$$

$$\Phi_\nu(x) = \int_{-1}^1 f_2(\vartheta) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \vartheta} d\xi ;$$

$P_\nu(\xi)$  - функция Лежандра первого рода степени  $\nu$ ;  $\xi = \cos \vartheta$  - аргумент функции Лежандра.

Из определения амплитудных значений векторного потенциала следуют расчетные соотношения для компонентов вектора напряженности магнитного поля над поверхностью металла

$$H_r(r, \vartheta) = -\frac{1}{\mu_0 r_2} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_r^{(\nu)}(r) P_\nu(\xi),$$

$$H_\vartheta(r, \vartheta) = -\frac{1}{\mu_0 r_2} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\vartheta^{(\nu)}(r) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \vartheta}, \quad (16)$$

где

$$H_r^{(\nu)}(r) = \begin{cases} \nu(\nu+1) \{ [C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x)] x^{\nu-1} + C_2^{(\nu)}(x) x^{-(2+\nu)} \} \forall x \leq 1, \\ \nu(\nu+1) \{ [C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(1)] + C_2^{(\nu)}(1) x^{-(2+\nu)} \} \forall x > 1; \end{cases}$$

$$H_\vartheta^{(\nu)}(r) = \begin{cases} \{ (\nu+1) [C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x)] x^{\nu-1} - \nu C_2^{(\nu)}(x) x^{-(2+\nu)} \} \forall x \leq 1, \\ \{ -\nu [C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(1)] + C_2^{(\nu)}(1) \} x^{-(2+\nu)} \} \forall x > 1. \end{cases}$$

Электромагнитное поле в объеме металла удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в квазистационарной формулировке записываются в следующем виде:

$$\text{rot} \vec{H}^*(r, \vartheta) = r_0 \vec{E}^*(r, \vartheta), \quad \text{rot} \vec{E}^*(r, \vartheta) = -i\omega \vec{B}^*(r, \vartheta), \quad (17)$$

где  $\vec{H}^*(r, \vartheta)$  и  $\vec{E}^*(r, \vartheta)$  - амплитудные значения гармонически изменяющихся во времени векторов напряженностей магнитного и электрического полей;  $\vec{B}^*(r, \vartheta)$  - амплитуда вектора магнитной индукции. В присутствии постоянного поля подмагничивания может возникать анизотропия магнитной проницаемости, и поэтому справедлива запись  $B_k^*(r, \vartheta) = \mu_{kn} H_m^*(r, \vartheta)$ , где  $\mu_{kn}$  - компонент тензора магнитной проницаемости. Тензор магнитной проницаемости определяется, за редким исключением, матрицей диагонального типа, которая записывается следующим образом

$$|\mu_{km}| = \begin{vmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ & \mu_{22} & 0 \\ & & \mu_{33} \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Применительно к рассматриваемому случаю вертикального подмагничивания элементы матрицы (18) соотносятся между собой следующим образом  $\mu_{11} = \mu_{22} \neq \mu_{33}$ .

Поскольку электромагнитное поле в объеме токопроводящего полупространства обладает осевой симметрией, постольку уравнения Максвелла (17) можно свернуть в одно дифференциальное уравнение для азимутального компонента  $E_\varphi^*(r, \vartheta)$  вектора напряженности электрического поля. Это уравнение имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\omega\mu_{33}} \left[ \frac{\partial^2 E_\varphi^*(r, \vartheta)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E_\varphi^*(r, \vartheta)}{\partial r} \right] + \frac{1}{i\omega\mu_{33}r^2} \left[ \frac{\partial^2 E_\varphi^*(r, \vartheta)}{\partial \vartheta^2} + \right. \\ \left. + ctg \vartheta \frac{\partial E_\varphi^*(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{E_\varphi^*(r, \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \right] = r_0 E_0^*(r, \vartheta). \end{aligned} \quad (19)$$

Общее решение уравнения (19) имеет следующий вид

$$E_\varphi^*(r, \vartheta) = -(\zeta r)^{-1/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e_\varphi^{(\nu)}(r) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \vartheta}, \quad (20)$$

где  $\zeta = \sqrt{i\omega\mu_{33}r_0}$  - комплексное волновое число электромагнитных колебаний в объеме токопроводящего (металлического) полупространства;  $A_\nu$  - подлежащие определению константы;

$$e_\varphi^{(\nu)}(r) = \begin{cases} I_{\beta_\nu}(\zeta r) \forall r \leq r_2, \\ I_{\beta_\nu}(\zeta r_2) K_{\beta_\nu}(\zeta r) / K_{\beta_\nu}(\zeta r_2) \forall r > r_2; \end{cases}$$

$I_{\beta_\nu}(\zeta r)$  и  $K_{\beta_\nu}(\zeta r)$  - модифицированные функции Бесселя и Макдональда порядка  $\beta_\nu = \sqrt{\mu_{33}\nu(\nu+1)/\mu_{11} + 1/4}$ ; в отсутствии анизотропии магнитной проницаемости  $\beta_\nu = \nu + 1/2$ .

Из второго уравнения системы уравнений Максвелла (17) следуют выражения для расчета амплитудных значений компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля в объеме токопроводящего полупространства:

$$H_r^*(r, \vartheta) = -\frac{\zeta(\zeta r)^{-3/2}}{i\omega\mu_{11}} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu h_r^{(\nu)}(r) P_\nu(\xi),$$

$$H_g^*(r, g) = -\frac{\zeta(\zeta r)^{-1/2}}{i\omega\mu_{33}} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} h_g^{(\nu)}(r) \frac{\partial P_{\nu}(\xi)}{\partial g}, \quad (21)$$

где

$$h_r^{(\nu)}(r) = \begin{cases} \nu(\nu+1)I_{\beta_{\nu}}(\zeta r) \forall r \leq r_2, \\ \nu(\nu+1)I_{\beta_{\nu}}(\zeta r_2)K_{\beta_{\nu}}(\zeta r)/K_{\beta_{\nu}}(\zeta r_2) \forall r > r_2; \end{cases}$$

$$h_g^{(\nu)}(r) = \begin{cases} \left[ I_{\beta_{\nu}-1}(\zeta r) - \frac{\beta_{\nu}-1/2}{\zeta r} I_{\beta_{\nu}}(\zeta r) \right] \forall r \leq r_2, \\ - \left\{ I_{\beta_{\nu}}(\zeta r_2) \left[ K_{\beta_{\nu}-1}(\zeta r) + \frac{\beta_{\nu}-1/2}{\zeta r} K_{\beta_{\nu}}(\zeta r) \right] / K_{\beta_{\nu}}(\zeta r_2) \right\} \forall r > r_2. \end{cases}$$

Неизвестные константы  $C_1^{(\nu)}$  и  $A_{\nu}$  определяются из условий сопряжения магнитных полей на границе  $g = \pi/2$  раздела сред с различными электрофизическими свойствами. Эти условия записываются следующим образом [5]:

$$H_r(r, \pi/2) = H_r^*(r, \pi/2), \quad (22)$$

$$\mu_0 H_g(r, \pi/2) = \mu_{33} H_g^*(r, \pi/2). \quad (23)$$

Так как поверхностная плотность пондеромоторных сил электромагнитного поля, т.е. напряжения  $\sigma_{gr}^*(r, \pi/2)$  и  $\sigma_{gg}^*(r, \pi/2)$  представляются рядами по функциям  $\psi(k_s r)$  и  $\varphi(k_{\ell} r)$ , то в контексте решаемой задачи это равносильно разложению в аналогичные ряды компонентов  $H_r^*(r, \pi/2)$  и  $H_g^*(r, \pi/2)$  вектора напряженности переменного магнитного поля. Принимая во внимание конструкцию выражений (9) и (10) для расчета коэффициентов разложения в указанные ряды, умножим левую и правую части граничного условия (22) на функцию  $\psi(k_s r) = (k_s r)^{-1/2} \Psi_{2n+1}(k_s r)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), а левую и правую части условия (23) на функцию  $\varphi(k_{\ell} r) = (k_{\ell} r)^{-1/2} \Phi_{2n}(k_{\ell} r)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Полученные результаты проинтегрируем по переменным  $k_s r$  и  $k_{\ell} r$  соответственно в пределах от нуля до бесконечности. После выполнения указанных операций граничные условия (22) и (23) можно записать в следующем виде

$$-\frac{1}{\mu_0 r_2} C_1^{(\nu)} c_{\nu n}(k_s) + \frac{\zeta}{i\omega\mu_{41}} A_{\nu} a_{\nu n}(\zeta, k_s) = J_0 r_2 \Xi_{\nu n}(k_s), \quad (24)$$

$$-\frac{1}{r_2} C_1^{(\nu)} d_{\nu n}(k_{\ell}) + \frac{\zeta}{i\omega} A_{\nu} b_{\nu n}(\zeta, k_{\ell}) = J_0 \mu_0 r_2 \Pi_{\nu n}(k_{\ell}), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
c_m(k_s) &= \nu(\nu+1) \left\{ \frac{1}{(k_s r_2)^{\nu-1}} \int_0^{k_s r_2} (k_s r)^{\nu-3/2} \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) + \right. \\
&\quad \left. + (k_s r_2)^{2+\nu} \int_{k_s r_2}^{\infty} (k_s r)^{-(\nu+5/2)} \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) \right\}; \\
a_m(\zeta, k_s) &= \nu(\nu+1) \left\{ \int_0^{k_s r_2} (\zeta r)^{-3/2} (k_s r)^{-1/2} I_{\beta_\nu}(\zeta r) \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)} \int_0^{k_s r_2} (\zeta r)^{-3/2} (k_s r)^{-1/2} K_{\beta_\nu}(\zeta r) \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) \right\}; \\
\Xi_m(k_s) &= \nu(\nu+1) \left\{ \frac{1}{(k_s r_2)^{\nu-1}} \int_{k_s r_1}^{k_s r_2} F_1^{(\nu)}(x) (k_s r)^{\nu-3/2} \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) + (k_s r_2)^{2+\nu} \times \right. \\
&\quad \times \int_{k_s r_1}^{k_s r_2} F_2^{(\nu)}(x) (k_s r)^{-(\nu+5/2)} \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) + (k_s r_2)^{2+\nu} [F_1^{(\nu)}(1) + \\
&\quad \left. + F_2^{(\nu)}(1) \int_{k_s r_2}^{\infty} (k_s r)^{-(\nu+5/2)} \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) \right\}; \\
d_m(k_\ell) &= \frac{(\nu+1)}{(k_\ell r_2)^{\nu-1}} \int_0^{k_\ell r_2} (k_\ell r)^{\nu-3/2} \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r) - \\
&\quad - \nu (k_s r_2)^{2+\nu} \int_{k_\ell r_2}^{\infty} (k_\ell r)^{-(\nu+5/2)} \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r); \\
b_m(\zeta, k_\ell) &= \int_0^{k_\ell r_2} (\zeta r)^{-1/2} \left[ I_{\beta_\nu-1}(\zeta r) - \frac{\beta_\nu-1/2}{\zeta r} I_{\beta_\nu}(\zeta r) \right] (k_\ell r)^{-1/2} \times \\
&\quad \times \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r) - \frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)} \int_0^{k_\ell r_2} (\zeta r)^{-1/2} \left[ K_{\beta_\nu-1}(\zeta r) + \frac{\beta_\nu-1/2}{\zeta r} K_{\beta_\nu}(\zeta r) \right] \times \\
&\quad \times (k_\ell r)^{-1/2} K_{\beta_\nu}(\zeta r) \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r); \\
\Pi_m(k_\ell) &= \frac{(\nu+1)}{(k_\ell r_2)^{\nu-1}} \int_{k_\ell r_1}^{k_\ell r_2} F_1^{(\nu)}(x) (k_\ell r)^{\nu-3/2} \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r) - \nu (k_\ell r_2)^{2+\nu} \times \\
&\quad \times \int_{k_\ell r_1}^{k_\ell r_2} F_2^{(\nu)}(x) (k_\ell r)^{-(\nu+5/2)} \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r) - \nu (k_\ell r_2)^{2+\nu} [F_1^{(\nu)}(1) + F_2^{(\nu)}(1)] \times \\
&\quad \times \int_{k_\ell r_2}^{\infty} (k_\ell r)^{-(\nu+5/2)} \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r).
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (24), (25) очевидно:

$$C_1^{(v)} = \mu_0 J_0 r_2^2 \frac{C_{vn}(\zeta, k_s, k_\ell)}{\Gamma_{vn}(\zeta, k_s, k_\ell)}, \quad A_v = \frac{\mu_0 J_0}{\mu_{33} r_0} (\zeta r_2) \frac{A_{vn}(k_s, k_\ell)}{\Gamma_{vn}(\zeta, k_s, k_\ell)}, \quad (26)$$

где  $C_{vn}(\zeta, k_s, k_\ell) = \Xi_{vn}(k_s) \mathcal{B}_{vn}(\zeta, k_\ell) - \mu_0 \Pi_{vn}(k_\ell) a_{vn}(\zeta, k_s) / \mu_{11}$  ;  
 $\Gamma_{vn}(\zeta, k_s, k_\ell) = \mu_0 d_{vn}(k_\ell) a_{vn}(\zeta, k_s) / \mu_{11} - c_{vn}(k_s) \mathcal{B}_{vn}(\zeta, k_\ell)$  ;  
 $A_{vn}(k_s, k_\ell) = \Xi_{vn}(k_s) d_{vn}(k_\ell) - \Pi_{vn}(k_\ell) c_{vn}(k_s)$  .

После определения коэффициентов  $A_v$ , разложения компонентов вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}^*(r, \vartheta)$  в ряды по функциям  $\psi(k_s r)$  и  $\varphi(k_\ell r)$  записывается следующим образом

$$H_r^*(r, \vartheta) = -\frac{\mu_0}{\mu_{11}} J_0 r_2 (k_s r)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{A_{vn}(k_s, k_\ell) a_{vn}(\zeta, k_s)}{s_n \Gamma(\zeta, k_s, k_\ell)} \Psi_{2n+1}(k_s r) P_v(\xi), \quad (27)$$

$$H_\vartheta^*(r, \vartheta) = -\frac{\mu_0}{\mu_{33}} J_0 r_2 (k_\ell r)^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{A_{vn}(k_s, k_\ell) \mathcal{B}_{vn}(\zeta, k_\ell)}{\ell_n \Gamma(\zeta, k_s, k_\ell)} \Phi_{2n}(k_\ell r) \frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \vartheta}, \quad (28)$$

где  $s_n = 1/(4n-1) + 1/(4n+3) + 1/(4n+7)$  ;  
 $\ell_n = 1/(4n-3) + 1/(4n+1) + 1/(4n+5)$  .

Соотношения (27) и (28) при значении аргумента функции Лежандра  $\xi = 0$  с точностью до постоянного множителя  $B_3^0$ , взятому с обратным знаком, определяют пространственное распределение и частотную зависимость поверхностных плотностей  $\sigma_{gr}^*(r, \pi/2)$  и  $\sigma_{g\vartheta}^*(r, \pi/2)$  пондеромоторных сил электромагнитного поля осесимметричного индуктора.

Окружной компонент  $E_\varphi^*(r, \vartheta)$  вектора напряженности переменного электрического поля в объеме металлического полупространства также можно представить в виде рядов по функциям  $\psi(k_s r)$  и  $\varphi(k_\ell r)$ . Выполнив эти разложения и умножив полученные результаты на удельную электрическую проводимость  $\Gamma_0$ , получаем два эквивалентных представления поверхностной плотности вихревого тока  $J_\varphi^*(r, \vartheta)$ , который фигурирует в определениях (12) объемных плотностей сил Лоренца. Подставляя значения вихревого тока в соотношения (12), получаем формулы для расчета радиального и полярного компонентов вектора объемной плотности сил Лоренца:

$$f_r^*(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{\mu_{33}} B_3^0 J_0 (\zeta r_2) (k_s r)^{-1/2} \sin \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{A_{vn}(k_s, k_\ell) e_{vn}(\zeta, k_s)}{s_n \Gamma(\zeta, k_s, k_\ell)} \times \\ \times \Psi_{2n+1}(k_s r) \frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \vartheta}, \quad (29)$$

$$f_g^*(r, g) = \frac{\mu_0}{\mu_{33}} B_3^0 J_0(\zeta r_2) (k_\ell r)^{-1/2} \cos g \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_n(k_s, k_\ell) e_m(\zeta, k_\ell)}{\ell_n \Gamma(\zeta, k_s, k_\ell)} \times \\ \times \Phi_{2n}(k_\ell r) \frac{\partial P_\nu(\zeta)}{\partial g}, \quad (30)$$

где

$$e_m(\zeta, k_s) = \int_0^{k_s r_2} (\zeta r)^{-1/2} I_{\beta_\nu}(\zeta r) (k_s r)^{-1/2} \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r) + \\ + \frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)} \int_{k_s r_2}^{\infty} (\zeta r)^{-1/2} K_{\beta_\nu}(\zeta r) (k_s r)^{-1/2} \Psi_{2n+1}(k_s r) d(k_s r); \\ e_m(\zeta, k_\ell) = \int_0^{k_\ell r_2} (\zeta r)^{-1/2} I_{\beta_\nu}(\zeta r) (k_\ell r)^{-1/2} \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r) + \\ + \frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)} \int_{k_\ell r_2}^{\infty} (\zeta r)^{-1/2} K_{\beta_\nu}(\zeta r) (k_\ell r)^{-1/2} \Phi_{2n}(k_\ell r) d(k_\ell r).$$

Таким образом, полностью определены все силовые факторы, входящие в состав аналитических конструкций для расчета амплитудных множителей продольных и поперечных волн, которые возбуждаются осесимметричным источником переменного магнитного поля.

**Выводы.** Сформулированы и математически строго решены обобщенные задачи Лэмба для осесимметричных, радиально распространяющихся сферических продольных и поперечных волн в изотропном упругом полупространстве. Определены компоненты пондеромоторных сил электромагнитного поля, которое возбуждается в металлах ферромагнитной группы осесимметричным источником конечных размеров. Полученные результаты составляют теоретическую основу для построения математической модели преобразователя электромагнитного типа с осевой симметрией в режиме возбуждения продольных и поперечных ультразвуковых волн.

**Список литературы:** 1. Неразрушающий контроль: Справочник: В 7 т. Под общ. ред. В.В. Клюева. Т. 3. Ультразвуковой контроль / И.Н. Ермолов, Ю.В. Ланге. – М.: Машиностроение, 2004. – 864 с. 2. Сучков Г.М. Современные возможности ЭМА дефектоскопии // Дефектоскопия. – 2005. - № 12. – С. 24 – 39. 3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283 с. 4. Горбашова А. Г., Петрищев О. Н., Сучков Г. М. Электромагнитное возбуждение радиально распространяющихся поверхностных волн Рэлея // Вестник НТУ «ХПИ». Харьков. – 2010.- Вып. 19. – С. 159 – 182. 5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с. 6. Петрищев О. Н. Принципы построения математических моделей ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа в режиме возбуждения упругих волн // Электроника и связь. – 2005. - №25. – С. 50 – 61.

Надійшла до редакції 15.04.12